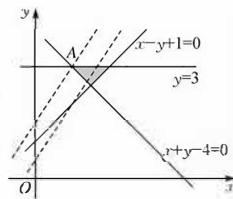
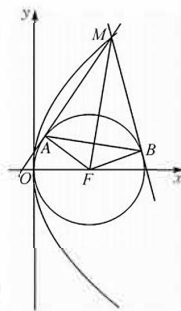


高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D 因为 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 1 \leq x < 5\}$, 所以 $A \cap B = [1, 3]$. 故选 D.
2. C 复数 $z = \frac{2-i}{i} = \frac{-i(2-i)}{-i \cdot i} = -1-2i$, 则 z 对应点的坐标为 $(-1, -2)$, 位于第三象限. 故选 C.
3. C 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 由 $f(-x) = (-x)^{-2} - (-x)^2 = x^{-2} - x^2 = f(x)$, 得 $f(x)$ 为偶函数, 可排除 A 和 B; 法一: 当 $x > 0$ 时, 设 $t = x^{-2}$, 则 $y = t - \frac{1}{t}$ ($t > 0$), 而 t 是关于 x 的减函数, y 是关于 t 的增函数, 由复合函数的单调性法则, 得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 可排除 D, 故选 C. 法二: 当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) > 0$, 可排除 D, 故选 C.
4. A 由系统抽样的特点知抽样间隔为 15, 故所抽样本编号符合 $x_0 + 15k$ (x_0 为第一段的抽取样本编号, $k \in \mathbb{N}$), 由抽取样本中有编号 67, 则 $x_0 = 7$, 选项中符合 $7 + 15k$ ($k \in \mathbb{N}$) 的是 112. 故选 A.
5. A 设双曲线的实半轴、半虚轴、半焦距分别为 a, b, c , 则由题意, 得 $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$, $c = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$, 又离心率为 2, 则 $\frac{1}{\cos \theta} = 2$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 又 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 故选 A.
6. D 设 $f(x) = e^x - x$, 由 $f'(x) = e^x - 1$, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 1 > 0$, 故 $e^x > x$, 所以 $c = e^b > b$, 又 $\ln a = c$, 所以 $a = e^c > c$, 所以 $a > c > b$. 故选 D.
7. B 用过圆锥的轴且与上底面一组对棱垂直的平面截该几何体可得 A 图, 用平行于圆锥底面的平面截该几何体可得 C 图, 用垂直于圆锥底面且不过圆锥的轴的平面截该几何体可得 D 图, 而 B 图用垂直于正方体的任何面的平面截都无法得到. 故选 B.
8. B 由题意知 $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{i(i+1)}$, 该框图的功能是求当 $1 - S < \frac{1}{1000}$ 时 $i+1$ 的最小值, 由 $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{i+1}$, 知 $1 - S = \frac{1}{i+1}$, 得 $\frac{1}{i+1} < \frac{1}{1000}$, 所以 $i > 999$, 所以 $i+1 \geq 1001$, 所以输出 i 的值为 1001. 故选 B.
9. C 直线 $ax + 2y + 4 = 0$ 与直线 $x + (a-1)y + 2 = 0$ 平行, 则 $a(a-1) - 2 = 0$, 且 $2a - 4 \neq 0$, 所以 $a = -1$, 反之当 $a = -1$ 时, 直线 $ax + 2y + 4 = 0$ 与直线 $x + (a-1)y + 2 = 0$ 平行, 故“直线 $ax + 2y + 4 = 0$ 与直线 $x + (a-1)y + 2 = 0$ 平行”是“ $a = -1$ ”的充要条件. 故选 C.
10. B 由题意, 得 $\begin{cases} \frac{3\pi}{2}\omega = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2\omega} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \omega = \frac{2}{3}k + \frac{1}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ 0 < \omega \leq 2, \end{cases}$ 解得 $\omega = \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}$. 故选 B.
11. C 法一: 由 $S_{\triangle AKC} = S_{\triangle AKD} + S_{\triangle KCD}$, 得 $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2} \sin \frac{A}{2}$, 所以 $6 \sin A = 5\sqrt{2} \sin \frac{A}{2}$, 所以 $\cos \frac{A}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$, 所以 $\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 2 \times \frac{50}{144} - 1 = -\frac{11}{36}$, 所以 $BC = \sqrt{9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times (-\frac{11}{36})} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. 故选 C.
法二: 在 $\triangle ABD$ 中, $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$, 即 $BD = \frac{3 \sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}$, 同理 $CD = \frac{2 \sin \angle CAD}{\sin \angle CDA}$, 又 $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle BDA = \pi - \angle CDA$, 所以 $\frac{BD}{CD} = \frac{3}{2}$, 所以设 $CD = 2t$, 则 $BD = 3t$, 所以 $9t^2 = 9 + 2 - 6\sqrt{2} \cos \angle BAD$, $4t^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} \cos \angle CAD$, 解得 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $BC = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. 故选 C.
12. D 因为直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, 菱形的四个顶点在球上, 所以底面是正方形. 设直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 底面正方形的边长为 a , 侧棱长为 h ; 由侧面积是 $8\sqrt{2}$, 得 $4ah = 8\sqrt{2}$, 即 $ah = 2\sqrt{2}$, 且该直四棱柱的外接球的半径 $R = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + h^2}$, 所以其外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = \pi(2a^2 + h^2) \geq \pi \cdot 2\sqrt{2}ah = 8\pi$ (当且仅当 $\sqrt{2}a = h$, 即 $a = \sqrt{2}$, $h = 2$ 时等号成立), 所以其外接球的表面积的最小值为 8π . 故选 D.
13. $ex + y + 1 = 0$ 由 $f'(x) = -e^x$, 得切线斜率 $k = f'(1) = -e$, 又 $f(1) = -e - 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -e - 1)$ 处的切线方程为 $ex + y + 1 = 0$.
14. $\frac{2\pi}{3}$ 因为 $|a| = |b| = 1$, 所以 $(a - 2b) \cdot (a + b) = a^2 - a \cdot b - 2b^2 = -1 - a \cdot b = -\frac{1}{2}$, 所以 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = -\frac{1}{2}$, 又 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$.
15. -3 作出可行域(如图阴影部分), 由 $z = 3x - 2y$, 得 $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z$, 平移直线 $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z$, 由图可知当直线 $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z$ 经过点 $A(1, 3)$ 时, 直线 $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z$ 在 y 轴上的截距最大, 此时 z 最小, 且 $z_{\min} = -3$.



16. $\left[\frac{4\sqrt{5}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right]$ 由题意知圆 F 的圆心为 $F(2,0)$, 半径 $r=2$, 抛物线方程 $y^2=8x$, 四边形 $MAFB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |MA| \cdot |AF| \times 2 = 2 \sqrt{|MF|^2 - 4}$, 又 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot |MF|$, 所以 $|AB| = \frac{4 \sqrt{|MF|^2 - 4}}{|MF|} = 4 \sqrt{1 - \frac{4}{|MF|^2}}$, 由抛物线定义, 得 $|MF| = x + 2$, 又 $x \in [1, 4]$, 所以 $|MF|^2 \in [9, 36]$, 所以 $\frac{4}{|MF|^2} \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right]$, 所以 $|AB| \in \left[\frac{4\sqrt{5}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right]$.



17. 解: (1) 因为 $a_1=1, a_{n+1}=a_n-2a_na_{n+1}$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} - 2$, 2 分
 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$. 所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 2 为公差的等差数列, 且 $\frac{1}{a_1}=1$, 3 分
 所以 $\frac{1}{a_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, 5 分
 所以 $a_n = \frac{1}{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 6 分
 (2) 由 (1) 知 $b_n = (2n-1) \times 3^n$,
 所以 $S_n = 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + 7 \times 3^4 + \dots + (2n-1) \times 3^n$,
 两边同乘以 3, 得
 $3S_n = 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + 7 \times 3^5 + \dots + (2n-1) \times 3^{n+1}$, 8 分
 两式相减, 得
 $-2S_n = 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + \dots + 2 \times 3^n - (2n-1) \times 3^{n+1}$
 $= 3 + 2(3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n) - (2n-1) \times 3^{n+1}$
 $= 3 + 2 \times \frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \times 3^{n+1}$ 10 分
 $= 3 + 3^{n+1} - 9 - (2n-1) \times 3^{n+1}$
 $= 2(1-n) \times 3^{n+1} - 6$
 所以 $S_n = (n-1) \times 3^{n+1} + 3$ 12 分

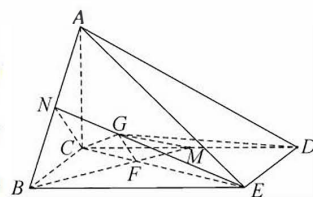
18. 解: (1) 由 $\bar{x} = \frac{1}{6} \times (0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5 + 0.6) = 0.35$,
 $\bar{y} = \frac{1}{6} \times (1.1 + 1.3 + 1.6 + 1.5 + 2.0 + 2.1) = 1.6$, 1 分
 $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 0.1 \times 1.1 + 0.2 \times 1.3 + 0.3 \times 1.6 + 0.4 \times 1.5 + 0.5 \times 2.0 + 0.6 \times 2.1 = 3.71$,
 $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 0.1^2 + 0.2^2 + 0.3^2 + 0.4^2 + 0.5^2 + 0.6^2 = 0.91$, 3 分
 有 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{3.71 - 6 \times 0.35 \times 1.6}{0.91 - 6 \times 0.35^2} = 2$,
 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} = 1.60 - 2 \times 0.35 = 0.9$, 5 分
 故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 2x + 0.9$ 6 分
 (2) 当 $x=0.1, \hat{y}=2 \times 0.1 + 0.9 = 1.1$, 残差为 $1.1 - 1.1 = 0$,
 当 $x=0.2, \hat{y}=2 \times 0.2 + 0.9 = 1.3$, 残差为 $1.3 - 1.3 = 0$,
 当 $x=0.3, \hat{y}=2 \times 0.3 + 0.9 = 1.5$, 残差为 $1.6 - 1.5 = 0.1$, 8 分
 当 $x=0.4, \hat{y}=2 \times 0.4 + 0.9 = 1.7$, 残差为 $1.5 - 1.7 = -0.2$,
 当 $x=0.5, \hat{y}=2 \times 0.5 + 0.9 = 1.9$, 残差为 $2.0 - 1.9 = 0.1$,
 当 $x=0.6, \hat{y}=2 \times 0.6 + 0.9 = 2.1$, 残差为 $2.1 - 2.1 = 0$, 10 分
 由这 6 棵 A 树木中残差为零的有 3 棵, 占比为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
 由题意知, “长势标准”的频率为 $\frac{1}{2}$, 依此估计这棵树木“长势标准”的概率为 $\frac{1}{2}$ 12 分

19. (1) 证明: 延长 EG 交 AB 于点 N , 连接 CN .

因为 G 为 $\triangle ABE$ 的重心, 所以 N 为 AB 的中点, 且 $\frac{EG}{GN} = 2$ 1 分

因为 $CM \parallel BE$, 所以 $\frac{EF}{FC} = \frac{BE}{CM} = 2$ 2 分

所以 $\frac{EF}{FC} = \frac{EG}{GN}$, 所以 $GF \parallel NC$ 3 分



又 $GF \not\subset$ 平面 ABC , $NC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $GF \parallel$ 平面 ABC 4 分

(2) 解: 因为平面 $ABC \perp$ 平面 $BCDE$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCDE = BC$, $DC \perp BC$, $DC \subset$ 平面 $BCDE$,

所以 $DC \perp$ 平面 ABC ,

因为 $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $DC \perp AC$,

同理 $BC \perp AC$, 5 分

又 $BC \cap DC = C$, $BC, DC \subset$ 平面 $BCDE$,

所以 $AC \perp$ 平面 $BCDE$,

因为 N 为 AB 的中点, 则 N 到平面 $BCDE$ 的距离 $d = \frac{1}{2}AC = 2$, 6 分

又 G 为 $\triangle ABE$ 的重心, 所以点 G 到平面 $BCDE$ 的距离 h 满足 $\frac{h}{d} = \frac{EG}{EN} = \frac{2}{3}$,

所以 $h = \frac{4}{3}$, 8 分

因为四边形 $EFMD$ 的面积 $S = \frac{1}{2}DE \cdot CD - \frac{1}{2}MC \cdot \frac{BC}{3} = 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$, 10 分

所以四棱锥 $G-EFMD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 因为分别过 F_1, F_2 所作的两条直线的斜率为 1, 故其倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 又两直线间的距离为 $\sqrt{2}$,

所以焦距 $2c = 2$, 所以 $c = 1$, 因为离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2$, 2 分

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) $k_{OM} = \frac{\frac{3}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{3}{2}$, 5 分

由 $OM \parallel l$, 可设直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x + n (n \neq 0)$, 代入 $3x^2 + 4y^2 = 12$, 并整理得

$3x^2 + 3nx + n^2 - 3 = 0$ 6 分

由直线 l 与 C 交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 得 $\Delta = 9n^2 - 12(n^2 - 3) > 0$,

解得 $0 < n^2 < 12$ 7 分

由韦达定理, 得 $x_1 + x_2 = -n, x_1 x_2 = \frac{n^2 - 3}{3}$,

所以 $|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{(1+\frac{9}{4})[(-n)^2 - 4 \times \frac{n^2-3}{3}]} = \sqrt{\frac{13(12-n^2)}{12}}$ 9 分

点 M 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2n|}{\sqrt{13}}$, 10 分

所以 $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13(12-n^2)}{12}} \cdot \frac{|2n|}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{n^2(12-n^2)}{12}}$ 11 分

因为 $\sqrt{\frac{n^2(12-n^2)}{12}} \leq \frac{n^2 + (12-n^2)}{2} = 6$,

所以当且仅当 $n^2 = 12 - n^2$, 即 $n = \pm\sqrt{6}$ (适合 $0 < n^2 < 12$) 时, $\triangle MAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 12 分

21. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = x - \ln x$, 1 分

则令 $h(x) = x - \ln x$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, 2 分

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x = 1$ 是 $f'(x)$ 的极小值点, 也是 $f'(x)$ 的最小值点,

所以 $f'(x) \geq f'(1) = 1 > 0$, 4 分

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. 5 分

(2) 由 $f(x)$ 有两个极值点, 得 $f'(x) = x - a \ln x$ 有两个零点.

法一(通法): 设 $g(x) = x - a \ln x$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$ 6 分

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 此时 $g(x)$ 最多有一个零点. 7 分

当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < a$; 由 $g'(x) > 0$, 得 $x > a$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上是减函数, 在 $(a, +\infty)$ 上是增函数,

所以 $x = a$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 也是 $g(x)$ 的最小值点, 且 $g(x)_{\min} = g(a) = a - a \ln a = a(1 - \ln a)$ 9 分

当 $a = e$ 时, $g(x)_{\min} = 0$, 此时, $g(x)$ 只有一个零点.

当 $0 < a < e$ 时, $g(x)_{\min} > 0$, 此时, $g(x)$ 无零点. 10 分

当 $a > e$ 时, $g(x)_{\min} < 0$, 又 $g(e^{-1}) = e^{-1} + a > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上有一个零点.

$g(e^a) = e^a - a^2 = e^a \left(1 - \frac{a^2}{e^a}\right)$, 令 $\varphi(a) = 1 - \frac{a^2}{e^a}$ ($a > e$), 则 $\varphi'(a) = \frac{a(a-2)}{e^a} > 0$,

所以 $\varphi(a)$ 在 $(e, +\infty)$ 上是增函数, 从而 $\varphi(a) > \varphi(e) = 1 - \frac{e^2}{e^e} > 0$, 所以 $g(e^a) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有一个零点. 11 分

此时, $g(x)$ 有两个零点, 且都是 $f(x)$ 的极值点.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$ 12 分

法二(优法): 问题可转化为关于 x 的方程 $a \ln x = x$ 有两个不等实根. 6 分

当 $\ln x = 0$, 即 $x = 1$ 时, $a \ln x = x$ 不成立; 7 分

当 $x > 1$, 且 $x \neq 1$ 时, $a = \frac{x}{\ln x}$,

令 $\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $y = a$ 与 $\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}$ 的图象有两个交点, 8 分

因为 $\varphi'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 所以当 $0 < x < 1$, 或 $1 < x < e$ 时, $\varphi'(x) < 0$; 当 $x > e$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

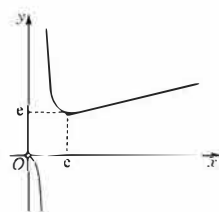
所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$, $(1, e)$ 上递减, 在 $(e, +\infty)$ 递增,

又当 $x \in (0, 1)$ 时, $\varphi(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 且 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 的最小值为 $\varphi(e) = e$,

..... 10 分

结合 $\varphi(x)$ 的图象, 得 $a > e$,

故 a 的取值范围是 $(e, +\infty)$ 12 分



第 22 题 (本大题 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别是 a 、 b 、 c , 且 $2a \sin B \cos A - b \sin A = 0$,

(1) 求 A ;

(2) 当函数 $f(x) = \sin B + \sqrt{3} \sin(C - \frac{\pi}{6})$ 取得最大值时, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【答案】 解: (1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 得 $a \sin B = b \sin A \neq 0$,

又 $2a \sin B \cos A - b \sin A = 0 \therefore 2 \cos A = 1$, 即 $\cos A = \frac{1}{2}$, 3 分

$\because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

(2) $\because A = \frac{\pi}{3} \therefore C = \frac{2\pi}{3} - B$ 从而 $C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - B$,

$\therefore f(x) = \sin B + \sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{2} - B) = \sin B + \sqrt{3} \cos B = 2 \sin(B + \frac{\pi}{3})$, 7 分

$\because \frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{3} < \pi$, 8 分

$\therefore$ 当 $B = \frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值, 这时 $C = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 9 分

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 10 分