2021年“安徽省示范高中皖北协作区”第23届高三联考

文科数学·答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	D	C	A	C	B	D	D	B	B	A	A

1. 答案　C

解析　$A=\{x|-1<x<2\}, B=\{x|0<x<1\}, \therefore A\cap B=(0,1)$.

2. 答案　D

解析　$(1+\mathrm{i})z=|1+\mathrm{i}|^2=2, \therefore z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}, \therefore z$ 的虚部为 -1.

3. 答案　C

解析　$\because 0<a<1, b>1, c<0, \therefore b>a>c$.

4. 答案　A

解析　由已知得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \therefore e^2=1+\dfrac{b^2}{a^2}=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}, \therefore e=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. 答案　C

解析　由 $a_5+a_6=a_2+5$ 得 $2a_2+7d=a_2+5$,即 $a_2+7d=a_9=5, \therefore S_{17}=17a_9=85$.

6. 答案　B

解析　将《张丘建算经》、《夏侯阳算经》分别记为 a,b,其余的4部算经依次记为 c,d,e,f,从上述6部算经中任选2部算经,所有的基本事件有 $ab,ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,cd,ce,cf,de,df,ef$,共15种情况,其中,事件“《张丘建算经》、《夏侯阳算经》至少有1部被选中”所包含的基本事件有 $ab,ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf$,共9种情况,因此,所求事件的概率为 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

7. 答案　D

解析　因为$|\boldsymbol{a}|=1$,且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=5$.

8. 答案　D

解析　定义域为$\{x|x\neq 0\}$,函数为非奇非偶函数,排除A,B,当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时,$f(x)<0$,排除C,故选D.

9. 答案　B

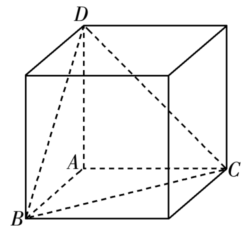
解析　该几何体为半径为1的半球中,挖掉一个底面在半球的底面的正四棱锥,所以几何体的体积为 $V=\dfrac{2}{3}\pi\times 1^3-\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\right)\times 1=\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\pi-2}{3}$.

10. 答案　B

解析　$f(x)=\sin\omega x(\sin\omega x+\cos\omega x)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\cos 2\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\omega x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,由 $x\in(0,\pi)$ 得 $2\omega x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(-\dfrac{\pi}{4},2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$,因为$f(x)$在$(0,\pi)$上恰有1个最大值点和1个最小值点,所以$\dfrac{3\pi}{2}<2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{5\pi}{2}$,解得$\dfrac{7}{8}<\omega\leqslant\dfrac{11}{8}$.

11. 答案　A

解析　因为$\triangle ABD$是以BD为斜边的等腰直角三角形，所以$DA\perp AB$，又因为平面$ABD\perp$平面ABC，所以$DA\perp$平面ABC，所以$DA\perp AC$，可得DA,BA,CA两两垂直，且$DA=BA=CA=\sqrt{2}$，构造正方体如图所示，可得四面体$ABCD$的外接球半径$R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以表面积为$4\pi R^2=6\pi$.



12. 答案　A

解析　方法一：$\left.\begin{aligned}&S_n=\dfrac{a_n^2+2a_n-3}{4}\Rightarrow 4S_n=a_n^2+2a_n-3\\&4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-3\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}\Rightarrow a_n^2-a_{n-1}^2-2a_n-2a_{n-1}=$

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，$\because a_n>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$. 当$n=1$时，$4S_1=a_1^2+2a_1-3=4a_1\Rightarrow a_1^2-2a_1-3=(a_1-3)(a_1+1)=0$，$\therefore a_1=3$或$a_1=-1<0$（舍去），$\therefore\{a_n\}$是以$a_1=3$为首项，2为公差的等差数列，$\therefore a_n=2n+1$，$\therefore b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=(-1)^{n+1}\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)$，$\therefore T_{2n}=$

$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\cdots-\dfrac{1}{4n+1}-\dfrac{1}{4n+3}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4n+3}\right)$. 由$T_{2n}>\dfrac{\lambda}{n}$得$\lambda<\dfrac{n}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4n+3}\right)=$

$\dfrac{n^2}{3(4n+3)}$，令$c_n=\dfrac{n^2}{3(4n+3)}$，则$c_n=\dfrac{n^2}{3(4n+3)}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\frac{4n+3}{n^2}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3\left(\frac{1}{n}\right)^2+4\times\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}}$

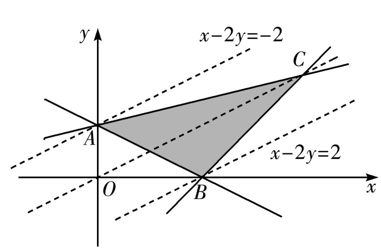
$\left(\text{或 } c_{n+1}-c_n=\dfrac{(n+1)^2}{3(4n+7)}-\dfrac{n^2}{3(4n+3)}=\dfrac{4n^2+10n+3}{3(4n+3)(4n+7)}>0\right)$，可知数列$\{c_n\}$是递增数列，$\therefore\lambda<c_1=\dfrac{1}{3(4\times1+3)}=\dfrac{1}{21}$.

方法二：同方法一得$\lambda<\dfrac{n^2}{3(4n+3)}$，令$f(x)=\dfrac{x^2}{3(4x+3)}(x>0)$，则$f'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2x(4x+3)-4x^2}{(4x+3)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4x^2+6x}{(4x+3)^2}>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(n)$的最小值为$f(1)=\dfrac{1}{21}$，$\therefore\lambda<\dfrac{1}{21}$.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 答案　2

解析　作出不等式组表示的平面区域，如图中阴影部分所示，目标函数$z=x-2y$表示的直线经过点$B(2,0)$时z取得最大值，最大值为2.



14. 答案　$y=2x-1$

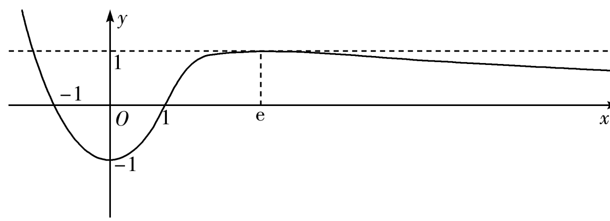
解析　$f'(x)=2x\ln x+x+1$，$\therefore f'(1)=1+1=2$，又$f(1)=1$，$\therefore f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=2x-1$.

15. **答案** $2\sqrt{5}$

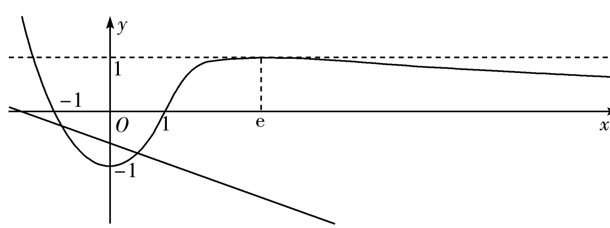
解析 由已知得 $F(1,0)$,设 $A(x_0,y_0)$,则 $|AF|=x_0+1=3$,$\therefore x_0=2$,$\therefore A$ 到 y 轴的距离为 $d=2$,$\therefore$ 圆截 y 轴所得弦长为 $2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$.

16. **答案** $-\frac{1}{2}<a<0$

解析 分析 $f(x)$ 的图像以便于作图,当 $x>1$ 时,$f'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{x^2}$,$f'(x)>0\Rightarrow 1<x<e$,$f'(x)<0\Rightarrow x>e$,所以 $f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,$f(e)=\frac{e\ln e}{e}=1$,且当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)>0$ 且 $f(x)\to 0$,所以 x 轴为曲线 $f(x)$ 的水平渐近线;当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x^2-1$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,1)$ 上单调递增,且 $f(0)=-1$. 由此作图,图像如图,



设 $f(x)=t$,则由 $g(x)=f(f(x))-af(x)+a+1=0$ 得 $f(t)-at+a+1=0\Rightarrow f(t)=at-a-1=a(t-1)-1$,若函数 $g(x)=f(f(x))-af(x)+a+1$ 恰有 5 个不同的零点,则关于 x 的方程 $g(x)=f(f(x))-af(x)+a+1=0$ 恰有 5 个不同的实根,则结合函数 $y=f(x)$ 的图像及直线 $y=a(x-1)-1$ 得 $f(t)=a(t-1)-1$ 恰有 2 个不等的实根,得 $t=t_1=f(x)\in(-1,0)$,$t=t_2=f(x)\in(0,1)$,$t=t_1=f(x)\in(-1,0)$ 有 2 个不等的实根,$t=t_2=f(x)\in(0,1)$ 有 3 个不等的实根,$\therefore -\frac{1}{2}<a<0$.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析** (Ⅰ)在 $\triangle ABD$ 中,$AD=1$,$BD=\sqrt{7}$,$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$,

由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$, ………………………………………… (1 分)

即 $(\sqrt{7})^2=AB^2+1^2-2AB\cdot 1\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=AB^2+1+AB$,

解得 $AB=2$ 或 $AB=-3$(舍去), ………………………………………………………………………… (3 分)

所以 $AB=2$. ……………………………………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理得,$\frac{1}{\sin\angle ABD}=\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$,

解得 $\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{21}}{14}$. …………………………………………………………………………… (6 分)

又因为 $\angle ABD$ 为锐角,所以 $\cos\angle ABD=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. ……………………………………………… (8 分)

所以 $\sin\angle ABC=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\angle ABD\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\angle ABD+\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin\angle ABD=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$. …………… (10 分)

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{7}\cdot\dfrac{3\sqrt{21}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. …………… (12 分)

18. **解析** (Ⅰ)$\because 0<r_1<r_2<1$,$\therefore y=ce^{dx}$ 更适合作为 y 关于 x 的回归方程类型. …………… (4 分)

(Ⅱ)$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=\dfrac{36}{8}=4.5$. …………… (5 分)

由 $y=ce^{dx}$ 得 $\ln y=\ln c+dx$,即 $w=\ln c+dx$, …………… (7 分)

$$d=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(w_i-\bar{w})}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{6.5}{42}=\frac{13}{84}\approx 0.15,$$ …………… (8 分)

$\ln c=\bar{w}-d\bar{x}=0.84-\dfrac{13}{84}\times 4.5\approx 0.14$. …………… (10 分)

$y=ce^{dx}=e^{0.14+0.15x}=e^{0.14}e^{0.15x}=1.15e^{0.15x}$. …………… (12 分)

注:若按 $\ln c=\bar{w}-d\bar{x}=0.84-0.15\times 4.5\approx 0.17$ 算得回归方程,扣 2 分.

19. **解析** (Ⅰ)由已知可得 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$,

$\therefore AC\perp BD$ 且 O 为 BD 的中点, …………… (2 分)

由 $BC=CD=BD=2$,$AB=AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,得 $OA=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,$OC=\sqrt{3}$,

$\therefore \dfrac{AO}{AC}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{AM}{AP}$, …………… (4 分)

$\therefore OM\parallel PC$,

又 $OM\not\subset$ 平面 PBC,$PC\subset$ 平面 PBC,

$\therefore OM\parallel$ 平面 PBC. …………… (5 分)

(Ⅱ)方法一:$\because PM=3MA$,$\therefore V_{P-MCD}=3V_{A-MCD}=\dfrac{3}{4}V_{P-ACD}$. …………… (7 分)

在 $\triangle ADC$ 中,易知 $\angle ADB=30^\circ$,$\angle CDB=60^\circ$,$\therefore\angle CDA=90^\circ$, …………… (8 分)

$\therefore S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\times CD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. …………… (10 分)

$\therefore V_{P-MCD}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times PA\times S_{\triangle ADC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …………… (12 分)

方法二:$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$,$\therefore PA\perp CD$. …………… (6 分)

在 $\triangle ABD$ 中,$AB=AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,$BD=2$,由余弦定理得 $\angle ADB=30^\circ$, …………… (7 分)

又 $\angle CDB=60^\circ$,$\therefore\angle CDA=90^\circ$,即 $CD\perp AD$,$\therefore CD\perp$ 平面 PAD. …………… (9 分)

$\therefore V_{P-MCD}=V_{C-PMD}=\dfrac{3}{4}V_{C-PAD}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}\times CD\times S_{\triangle PAD}$ …………… (11 分)

$=\dfrac{1}{4}\times 2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …………… (12 分)

其他解法酌情给分.

20. **解析** (Ⅰ)设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$,由题意得 $\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}ab=\sqrt{3}, \end{cases}$

又 $a^2=b^2+c^2$， ……………………………………………………………………（2 分）

$\therefore \begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=1, \end{cases}$ ……………………………………………………………………（3 分）

$\therefore$ 椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $Q(4,y_1)$.

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，将 $x=my+1$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$， ……………………………………………………（6 分）

得 $my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$. ①

直线 QN：$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-4}(x-4)+y_1$， ……………………………………………………（7 分）

假设直线 QN 过定点，则由对称性知定点在 x 轴上，

设直线 QN 与 x 轴的交点为 $(x_0,0)$，

则 $\frac{y_2-y_1}{x_2-4}(x_0-4)+y_1=0$，

$\therefore x_0=\frac{-y_1(x_2-4)}{y_2-y_1}+4=\frac{y_1(3-my_2)}{y_2-y_1}+4=\frac{3y_1-my_1y_2}{y_2-y_1}+4$， ……………………………（9 分）

将①式代入上式可得 $x_0=\frac{3y_1-my_1y_2}{y_2-y_1}+4=\frac{3y_1-\frac{3}{2}(y_1+y_2)}{y_2-y_1}+4=\frac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{y_2-y_1}+4=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$.

$\therefore$ 直线 QN 过定点 $\left(\frac{5}{2},0\right)$. ……………………………………………………………（12 分）

其他解法酌情给分.

21. **解析** （Ⅰ）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\frac{1}{2}x+\sin x$，$f'(x)=-\frac{1}{2}+\cos x$， ……………………………（1 分）

由 $f'(x)=-\frac{1}{2}+\cos x>0$ 得 $\cos x>\frac{1}{2}$，$\therefore 2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

由 $f'(x)=-\frac{1}{2}+\cos x<0$ 得 $\cos x<\frac{1}{2}$，$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$， ………………………（3 分）

$\therefore f(x)$ 的增区间为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，减区间为 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$， …………………（4 分）

$\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\therefore x_n=\frac{\pi}{3}+2(n-1)\pi$. ……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）$f(x)\leqslant xe^x \Leftrightarrow ax+\sin x\leqslant xe^x \Leftrightarrow xe^x-\sin x-ax\geqslant 0$.

设 $g(x)=xe^x-\sin x-ax$，则 $g'(x)=(x+1)e^x-\cos x-a$.

设 $h(x)=g'(x)=(x+1)e^x-\cos x-a$，则 $h'(x)=(x+2)e^x+\sin x$.

$\because f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\therefore x+2>2$，$e^x>1$，

$\therefore (x+2)e^x>2$，又 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$\therefore h'(x)=(x+2)e^x+\sin x>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore h(x)>h(0)=1-1-a=-a$. ……………………………………………………………（7 分）

①当 $-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)>-a\geqslant 0$，即 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数,

$\therefore g(x)>g(0)=0$在$(0,+\infty)$上恒成立,

$\therefore a\leqslant 0$符合题意. ………………………………………………………………………………………………(9分)

②当$-a<0$,即$a>0$时,

$\exists x_0\in(0,+\infty)$,使得$g'(x_0)=0$,则$x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,$x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,

$\therefore x\in(0,x_0)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(0,x_0)$上为减函数,

$\therefore x\in(0,x_0)$时,$g(x)<g(0)=0$,不合题意. ………………………………………………………(11分)

综上所述,a的取值范围为$a\leqslant 0$. ……………………………………………………………………………(12分)

其他解法酌情给分.

22. **解析** (Ⅰ)曲线C_1的极坐标方程为$\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta+4$,曲线$C_2$的直角坐标方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. ………(5分)

(Ⅱ)联立曲线C_1和C_2的极坐标方程得$\rho^2-8\sqrt{3}\rho-16=0$,设$A\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right)$,$B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$,

则$\rho_1+\rho_2=8\sqrt{3}$,$\rho_1\rho_2=-16$,$|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=16$,

所以$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{1}{|\rho_1|}+\frac{1}{|\rho_2|}=\frac{|\rho_1-\rho_2|}{|\rho_1\rho_2|}=\frac{16}{16}=1$. ………………………………………………………(10分)

23. **解析** (Ⅰ)$f(x)=|2x+1|+\left|x+\frac{3}{2}\right|=\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{3}{2}\right|$

$\geqslant 0+\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{3}{2}\right|\geqslant\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right|=1$,

当且仅当$x=-\frac{1}{2}$时等号成立. ………………………………………………………………………………(5分)

(Ⅱ)因为$a+b+c=1$,所以$1=\frac{a}{2}+b+\frac{a}{2}+c\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot b}+2\sqrt{\frac{a}{2}\cdot c}$,

所以$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当$a=\frac{1}{2}$,$b=c=\frac{1}{4}$时等号成立. ……………………………………………………………(10分)

绝密★启用前

2021 年"安徽省示范高中皖北协作区"第 23 届高三联考

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2<0\}$,$B=\{x|0<x<1\}$,则 $A\cap B=$

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(0,1)$　　D. $(0,2)$

2. 已知 i 为虚数单位,$(1+i)z=|1+i|^2$,则复数 z 的虚部为

A. 0　　B. 1　　C. $-i$　　D. -1

3. 已知 $a=0.3^{0.2}$,$b=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{7}$,$c=\log_5\frac{2}{5}$,则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,则该双曲线的离心率为

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $a_5+a_6=a_2+5$,则 $S_{17}=$

A. 5　　B. 17　　C. 85　　D. 170

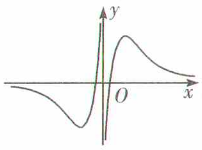
6. 我国古代有着辉煌的数学研究成果,其中《算经十书》是指汉、唐一千多年间的十部著名的数学著作,这些数学著作曾经是隋唐时代国子监算学科的教科书.十部书的名称是:《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《缀术》、《五曹算经》、《孙子算经》.《算经十书》标志着中国古代数学的高峰.《算经十书》这 10 部专著,有着十分丰富多彩的内容,是了解我国古代数学的重要文献.这 10 部专著中据说有 6 部成书于魏晋南北朝时期,其中《张丘建算经》、《夏侯阳算经》就成书于魏晋南北朝时期.某中学拟从《算经十书》专著中的魏晋南北朝时期的 6 部算经中任选 2 部作为"数学文化"进行推广学习,则所选 2 部专著中至少有一部是《张丘建算经》、《夏侯阳算经》的概率为

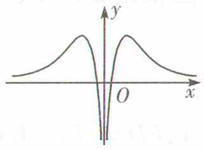
A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{3}{4}$

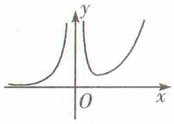
7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$,且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$

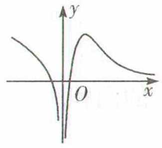
A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. 5

8. 函数$f(x)=\dfrac{x^2+\ln|x|}{e^x}$的大致图像是

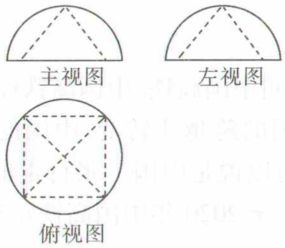
A. 

B. 

C. 

D. 

9. 某几何体的三视图如图,俯视图中圆的半径为1,且其内接四边形为正方形,则该几何体的体积为



A. $\dfrac{2\pi-4}{3}$　　B. $\dfrac{2\pi-2}{3}$　　C. $\dfrac{4\pi-2}{3}$　　D. $\dfrac{2\pi+2}{3}$

10. 已知函数$f(x)=\sin\omega x(\sin\omega x+\cos\omega x)-\dfrac{1}{2}(\omega>0)$在区间$(0,\pi)$上恰有1个最大值点和1个最小值点,则$\omega$的取值范围是

A. $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{11}{8}\right)$　　B. $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{11}{8}\right]$　　C. $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{9}{8}\right]$　　D. $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{9}{8}\right)$

11. 在四面体$ABCD$中,$\triangle BCD$是边长为2的等边三角形,$\triangle ABD$是以BD为斜边的等腰直角三角形,平面$ABD\perp$平面ABC,则四面体$ABCD$的外接球的表面积为

A. 6π　　B. $\sqrt{6}\pi$　　C. 8π　　D. $2\sqrt{2}\pi$

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n>0$,其前n项和$S_n=\dfrac{a_n^2+2a_n-3}{4}$,数列$\{b_n\}$满足$b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}$,其前$n$项和为$T_n$. 若$T_{2n}>\dfrac{\lambda}{n}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立,则实数$\lambda$的取值范围是

A. $\left(-\infty,\dfrac{1}{21}\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{15}\right)$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{4}{33}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{4}{21}\right)$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y\geqslant 2,\\ x-y\leqslant 2,\\ x-4y+4\geqslant 0,\end{cases}$则$z=x-2y$的最大值为__________.

14. 已知函数$f(x)=x^2\ln x+x$,则$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为__________.

15. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,点A在抛物线C上,且满足$|AF|=3$,则以点A为圆心,AF为半径的圆截y轴所得弦长为__________.

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e\ln x}{x}(x>1),\\ x^2-1(x\leqslant 1),\end{cases}$若函数$g(x)=f(f(x))-af(x)+a+1$恰有5个不同的零点,则实数$a$的取值范围是__________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题,考生根据要求作答.

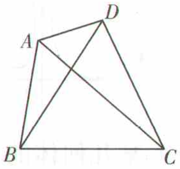
(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AD=1$,$BD=\sqrt{7}$,$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$.

(Ⅰ)求边 AB 的长;

(Ⅱ)若 $\angle CBD=\frac{\pi}{3}$,$BC=BD$,求 $\triangle ABC$ 的面积.



18. (12 分)

有一种速度叫中国速度,有一种骄傲叫中国高铁. 中国高铁经过十几年的发展,取得了举世瞩目的成就,使我国完成了从较落后向先进铁路国的跨越式转变. 中国的高铁技术不但越来越成熟,而且还走向国外,帮助不少国家修建了高铁. 高铁可以说是中国一张行走的名片. 截至到 2020 年,中国高铁运营里程已经达到 3.9 万公里. 下表是 2013 年至 2020 年中国高铁每年的运营里程统计表,它反映了中国高铁近几年的飞速发展:

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
年份代码 x	1	2	3	4	5	6	7	8
运营里程 y(万公里)	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.9	3.5	3.9

根据以上数据,回答下面问题.

(Ⅰ)甲同学用曲线 $y=bx+a$ 来拟合,并算得相关系数 $r_1=0.97$,乙同学用曲线 $y=ce^{dx}$ 来拟合,并算得转化为线性回归方程所对应的相关系数 $r_2=0.99$,试问哪一个更适合作为 y 关于 x 的回归方程类型,并说明理由;

(Ⅱ)根据(Ⅰ)的判断结果及表中数据,求 y 关于 x 的回归方程(系数精确到 0.01).

参考公式:用最小二乘法求线性回归方程的系数公式:$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$;

参考数据:$\bar{y}=2.48$,$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=15.50$,$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2=42.00$,

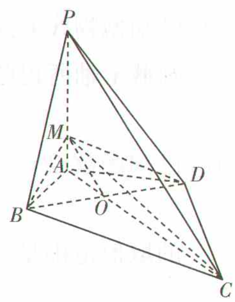
令 $w=\ln y$,$\bar{w}=0.84$,$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(w_i-\bar{w})=6.50$,$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})^2=1.01$,$e^{0.14}=1.15$.

19. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA\perp$ 底面 $ABCD$,$PA=BC=CD=BD=2$,$AB=AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$AC$ 与 BD 交于点 O,点 M 在线段 PA 上,且 $PM=3MA$.

(Ⅰ)证明:$OM\parallel$ 平面 PBC;

(Ⅱ)求三棱锥 $P-MCD$ 的体积.



20. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,A,B 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点和上顶点,$\triangle OAB$ 的面积为$\sqrt{3}$,且椭圆 C 的离心率为$\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程.

(Ⅱ)设斜率不为0的直线 l 经过椭圆 C 的右焦点 F,且与椭圆 C 交于不同的两点 M,N,过 M 作直线 $x=4$ 的垂线,垂足为 Q. 试问:直线 QN 是否过定点?若过定点,请求出定点的坐标;若不过定点,请说明理由.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=ax+\sin x$,$x\in(0,+\infty)$.

(Ⅰ)当 $a=-\frac{1}{2}$时,函数 $f(x)$ 的极大值点从小到大依次记为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$,求数列$\{x_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)若 $f(x)\leqslant xe^x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=4t^2-1,\\y=4t\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(Ⅱ)设曲线 C_1 与曲线 C_2 交于两点 A,B,求$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}$的值.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x)=|2x+1|+\left|x+\frac{3}{2}\right|$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 的最小值为 m,且正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$,证明:$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.