绝密★启用前

2021—2022 学年度高二上学期期末联考

数学试题

本试卷共 4 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2.选择题的作答：选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3.填空题和解答题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4.考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题(本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.已知直线 l_1 与直线 $l_2:3x-\sqrt{3}y+10=0$ 垂直，则直线 l_1 的倾斜角为

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $150°$

2.已知集合 $A=\{x\mid y=\lg(x-1)+\sqrt{3-x}\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $(1,3]$　　C. $[1,3]$　　D. $(1,3)$

3.若圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-8x+m=0$ 内切，则实数 $m=$

A. -9　　B. 7　　C. -9 或 7　　D. 9

4.已知函数 $f(x)=2^x+x^3$，则不等式 $f\left(m^2-\frac{3}{2}m\right)<3$ 的解集为

A. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{2},2\right)$　　D. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

5.若 $m,n\in\mathbf{R}$，且 $mn\neq0$，则“$\left(\frac{1}{9}\right)^m<\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$”是“方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6.1852 年，英国来华传教士伟烈亚力将《孙子算经》中“物不知数”问题的解法传至欧洲. 1874 年，英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得到的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”.“中国剩余定理”讲的是一个关于整除的问题，现有这样一个整除问题：将 1 到 500 这 500 个数中，能被 3 除余 2，且被 5 除余 2 的数按从小到大的顺序排成一列，构成数列 $\{a_n\}$，则这个新数列各项之和为

A. 6 923　　B. 6 921　　C. 8 483　　D. 8 481

7.《九章算术》中将底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为堑堵. 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AC=BC=1$，$AA_1=2$，点 P 为线段 BA_1 的中点，则点 P 到平面 A_1B_1C 的距离为

A. 3　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

8.已知直线 l 与曲线 $C_1:y=\ln x+4$ 和曲线 $C_2:y=\ln(x+1)$ 都相切，则直线 l 在 y 轴上的截距为

A. $1-\ln 2$　　B. $3-2\ln 2$　　C. $1-\ln 2$ 或 $3-\ln 2$　　D. 4

二、选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9.下列求导错误的是

A. $(e^{3x})'=3e^x$　　B. $\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)'=x$

C. $(2\sin x-3)'=2\cos x$　　D. $(x\cos x)'=\cos x-x\sin x$

10.已知直线 $l:kx-y-k+1=0$ 和圆 $O:x^2+y^2=4$，则下列说法正确的是

A. 直线 l 恒过定点 $(1,-1)$

B. 直线 l 与圆 O 相交

C. 当 $k=1$ 时，直线 l 被圆 O 截得的弦长为 2

D. 直线 l 被圆 O 截得的最短弦的长度为 $2\sqrt{2}$

11.已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$，将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 4 倍，纵坐标不变，再向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，向下平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则以下结论正确的是

A. $g(x)=-2\cos\frac{1}{2}x-2$

B. 直线 $x=\frac{4\pi}{3}$是 $g(x)$ 图象的一条对称轴

C. $g(x)$ 的单调递减区间为$\left[\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\frac{10\pi}{3}+4k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. 若 $g(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上的最大值为 0，最小值为 -3，则 t 的取值范围为$\left[\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]$

12.在数列 $\{a_n\}$ 中，记 $[a_n]$ 为不超过 a_n 的最大整数，则数列 $\{[a_n]\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的取整数列. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{3}a_2=2$，$a_{n+2}=2(a_{n+1}+1)-a_n$，$b_n=\frac{2a_n}{n^2(n+1)}+3$，记数列 $\{[b_n]\}$ 的前 n 项和为 T_n，则下列说法正确的是

A. 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等差数列　　B. $b_n=3+\frac{1}{n}$

C. $[b_{2\,022}]=3$　　D. $T_n=2n+5$

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13.若平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,-6,s)$，平面 β 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,t,2)$，且 $\alpha\parallel\beta$，则 $s-t=$________.

14.已知函数 $f(x)$ 同时具有下列性质：① $f(x)=-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$；② $f'(x)$ 是奇函数；③ $f(x)$ 的最大值为 3，请写出一个符合函数 $f(x)$ 条件的解析式 $f(x)=$________.

15.一张 B4 纸的厚度为 0.09 mm，将其对折后厚度变为 0.18 mm，第 2 次对折后厚度变为 0.36 mm，…. 设 $a_1=0.18$，第 $n(n\geqslant2)$ 次对折后厚度变为 a_n mm，则 $a_6=$________；记 $b_n=\frac{0.09a_n}{(a_n-0.09)(a_{n+1}-0.09)}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=$________.(本题第一空 2 分，第二空 3 分)

16.已知抛物线 $C:x^2=8y$ 的焦点为 F，F 关于原点的对称点为 A，C 上的动点 M 在 x 轴上的射影为 B，则$\frac{|MF|+|MB|+2}{|MA|}$的最小值为________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

设 $f(x)=\sin x-x\cos x$，证明：曲线 $f(x)$ 在点 $P\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线与坐标轴围成的图形的面积小于 1.

18.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b\sin A\cos C=a(\sqrt{3}\cos A-\cos B\sin C)$.

(1)求 A；

(2)若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2，且 $b-c=\frac{a}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\frac{S_n+n}{a_n}=\frac{3}{2}$，记 $b_n=a_n+1$.

(1)证明：数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，并求其通项公式；

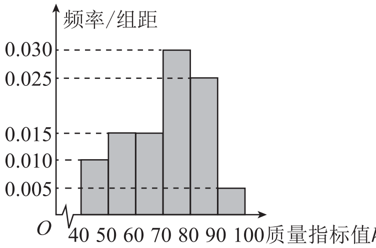
(2)求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20.（本小题满分 12 分）

2021 年 4 月 6 日，我国发表了《人类减贫的中国实践》白皮书，白皮书提到占世界人口近五分之一的中国全面消除绝对贫困，提前 10 年实现减贫目标. 为帮助村民巩固脱贫成果，某村委会积极引导村民种植一种名贵中药材，并成立药材加工厂对该药材进行切片加工，包装成袋出售. 已知这种袋装中药的质量以某项指标值 $k(40\leqslant k\leqslant 100)$ 为衡量标准，k 值越大，质量越好，该质量指标值的等级及出厂价如下表所示：

质量指标值 k	[40,60)	[60,80)	[80,90)	[90,100]
等级	三级	二级	一级	优级
出厂价(元/袋)	100	120	150	190

该药材加工厂为了解生产这种袋装中药的经济效益，从所生产的这种袋装中药中随机抽取了 1 000 袋，测量了每袋中药成品的 k 值，得到如图所示的频率分布直方图.



(1)视频率为概率，求该药材加工厂所生产的袋装中药成品的质量指标值 k 的平均数（同一组中的数据用该组区间中点值作代表）；

(2)现将该种袋装中药放在某药店出售，在某天进店的甲、乙、丙 3 位顾客中，购买此款袋装中药的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$，且三人是否购买互不影响，试求这 3 人中恰有 2 人购买此款袋装中药的概率；

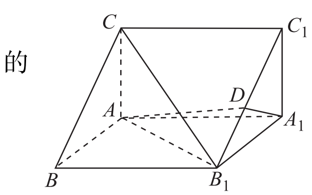
(3)假定该中药加工厂一年的袋装中药的产量为 10 万袋，且全部都能销售出去，若每袋袋装中药的成本为 90 元，工厂的设备投资为 200 万元，问：该中药加工厂是否有可能在一年内通过加工该袋装中药收回投资？并说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为矩形，且侧面 $ACC_1A_1\perp$ 侧面 ABB_1A_1，$AB=AC=2$，$AA_1=B_1C=2\sqrt{2}$.

(1)证明：$A_1B_1\perp$ 平面 AB_1C；

(2)若点 D 为棱 B_1C_1 的中点，求平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成的锐二面角的余弦值.



22.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且过点 $(4,\sqrt{15})$.

(1)求 C 的标准方程；

(2)若 C 的左、右顶点分别为 A,B，过 C 的右焦点 F 的直线交 C 于 M,N 两点，问：直线 AM 与直线 BN 的斜率之比是否为定值？若为定值，求出该定值；若不为定值，请说明理由.

数学参考答案

一、选择题

1. D 【解析】由 $l_1 \perp l_2$，得 $k_{l_2}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，$\therefore k_{l_1}=-\frac{1}{k_{l_2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 150°$，故直线 l_1 的倾斜角为 $150°$. 故选 D.

2. B 【解析】$A=\{x|1<x\leqslant 3\}$，$B=\{y|y\geqslant 1\}$，故 $A\cap B=(1,3]$. 故选 B.

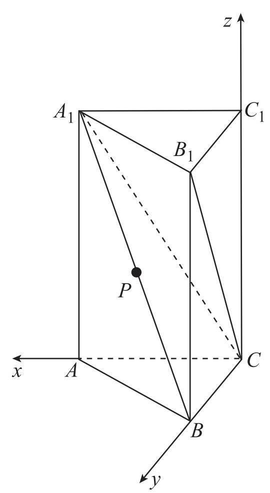
3. A 【解析】圆 C_2：$x^2+y^2-8x+m=0$ 的方程可配方为 $(x-4)^2+y^2=16-m(m<16)$，由已知得 C_1 圆心为 $(0,0)$，半径 $r_1=1$，C_2 圆心 $(4,0)$，半径 $r_2=\sqrt{16-m}$，由两圆内切，得 $|C_1C_2|=|r_2-r_1|$，于是得 $\sqrt{16-m}-1=4$，解得 $m=-9$. 故选 A.

4. C 【解析】因为 $f(x)=2^x+x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f(1)=3$，所以由 $f\left(m^2-\frac{3}{2}m\right)<f(1)$，得 $m^2-\frac{3}{2}m<1$，即 $2m^2-3m-2<0$，解得 $-\frac{1}{2}<m<2$. 故选 C.

5. B 【解析】若 $\left(\frac{1}{9}\right)^m<\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$，则 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}<\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$，则 $m>n$，若方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则 $m>n>0$，但当 n 为负数时，不能推出"方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆"，故"$\left(\frac{1}{9}\right)^m<\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$"是"方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆"的必要不充分条件. 故选 B.

6. C 【解析】由题意可知数列 $\{a_n-2\}$ 既是 3 的倍数，又是 5 的倍数，因此数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，以 15 为公差的等差数列，$a_n=2+15(n-1)=15n-13$，令 $15n-13\leqslant 500$，解得 $n\leqslant 34\frac{1}{5}$，因此这个新数列的最后一项为 $a_{34}=497$，设新数列的前 n 项和为 S_n，则 $S_{34}=\frac{34\times(2+497)}{2}=8\ 483$. 故选 C.

7. D 【解析】如图，在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，由 $AC=BC=1$ 可知，$AC\perp BC$. 以 C 为原点，CA 为 x 轴，CB 为 y 轴，CC_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，$B_1(0,1,2)$，$A_1(1,0,2)$，$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{B_1C}=(0,-1,-2)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{PA_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$. 设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=x-y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=-y-2z=0\end{cases}$，取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$，设点 P 到平面 A_1B_1C 的距离为 d，则 $d=\frac{|\overrightarrow{PA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\frac{1}{2}\times(-2)-\frac{1}{2}\times(-2)+1\times 1\right|}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$. 故选 D.



8. B 【解析】设 $f(x)=\ln x+4, g(x)=\ln(x+1)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=\frac{1}{x+1}$. 设 $f(x)$ 上的切点为 (x_1, y_1)，$g(x)$ 上的切点为 (x_2, y_2)，则 $k=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1}$，则 $x_2+1=x_1$. 又 $y_1=\ln x_1+4, y_2=\ln(x_2+1)=\ln x_1$，所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4$，故 $x_1=\frac{1}{k}=\frac{1}{4}, y_1=\ln\frac{1}{4}+4=4-2\ln 2$. 故 $b=y_1-kx_1=4-2\ln 2-1=3-2\ln 2$. 故选 B.

二、选择题

9. AB 【解析】$(e^{3x})'=3e^{3x}$，A 错误；$\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)'=\frac{2x(2x+1)-2x^2}{(2x+1)^2}\neq x$，B 错误；$(2\sin x-3)'=2\cos x$，C 正确；$(x\cos x)'=x'\cos x+x(\cos x)'=\cos x-x\sin x$，D 正确. 故选 AB.

10. BD 【解析】直线 $l: kx-y-k+1=0$ 整理得 $y-1=k(x-1)$，故直线过定点 $P(1,1)$，故 A 错误；由于点 $(1,1)$ 在圆 O 内，故直线 l 与圆 O 相交，B 正确；当 $k=1$ 时，直线 $l: x-y=0$ 过圆心 O，故直线 l 被圆 O 截得的弦为直径，其长为 4，C 错误；当点 $P(1,1)$ 为弦的中点时，直线 l 被圆 O 截得的弦最短，此时的弦长为 $2\sqrt{r^2-OP^2}=2\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选 BD.

11. BCD 【解析】易求得 $g(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)-2$，A 错误；当 $x=\frac{4\pi}{3}$ 时，$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，此时 $g(x)$ 取得最大值，故直线 $x=\frac{4\pi}{3}$ 是 $g(x)$ 图象的一条对称轴，B 正确；令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{4\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{10\pi}{3}+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 故函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{4\pi}{3}+4k\pi, \frac{10\pi}{3}+4k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故 C 正确；当 $x\in[0, t]$ 时，$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\right]$，若 $g(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上的最大值为 0，最小值为 -3，则 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，解得 $\frac{4\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{8\pi}{3}$，D 正确. 故选 BCD.

12. AC 【解析】由 $a_{n+2}=2(a_{n+1}+1)-a_n$，得 $a_n+a_{n+2}-2a_{n+1}=2$，$\therefore(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2$，且 $a_2-a_1=4$，因此，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 4 为首项，以 2 为公差的等差数列，故 A 正确；$\therefore a_{n+1}-a_n=4+2(n-1)=2(n+1)$，$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$，$\therefore b_n=\frac{2a_n}{n^2(n+1)}+3=3+\frac{2}{n}$，故 B 错误；则 $b_1=3+\frac{2}{1}=5, b_2=3+\frac{2}{2}=4$，当 $n\geqslant 3$ 时，$0<\frac{2}{n}<1$，则 $3<3+\frac{2}{n}<4$，则 $3<b_n<4$，即 $[b_n]=3$，故 $[b_{2\,022}]=3$，C 正确；$T_1=[b_1]=5, T_2=[b_1]+[b_2]=9$，当 $n\geqslant 3$ 时，$T_n=[b_1]+[b_2]+\cdots+[b_n]=9+3(n-2)=3n+3$，综上所述 $T_n=\begin{cases}5, n=1,\\ 3n+3, n\geqslant 2,\end{cases}$ D 错误. 故选 AC.

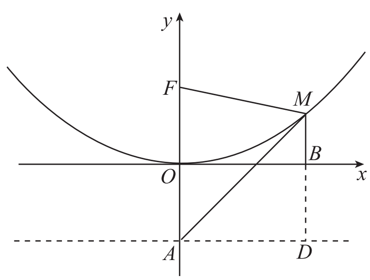
三、填空题

13. 7 【解析】由 $\alpha/\!/\beta$，得 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $\frac{2}{1}=\frac{-6}{t}=\frac{s}{2}$，解得 $t=-3, s=4$，$\therefore s-t=7$.

14. $3\cos 2x$（答案不唯一） 【解析】由 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos(2x+\pi)=-3\cos 2x=-f(x)$，$f'(x)=-6\sin 2x$ 是奇函数，$f(x)=3\cos 2x$ 的最大值为 3，所以函数 $f(x)=3\cos 2x$ 符合题意.

15.5.76　$\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$　【解析】因为每对折一次，纸张的厚度增加一倍，所以数列$\{a_n\}$是首项为0.18，公比为2的等比数列，所以$a_n=0.18\times 2^{n-1}=0.09\times 2^n$，$a_6=0.09\times 2^6=5.76$；$b_n=\frac{0.09a_n}{(a_n-0.09)(a_{n+1}-0.09)}=\frac{0.09^2\times 2^n}{0.09^2(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，所以$T_n=1-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$.

16.$\sqrt{2}$　【解析】由已知可得$F(0,2)$，$A(0,-2)$，则点A在C的准线$l:y=-2$上，根据对称性，不妨设$M(x,y)$在第一象限，如图所示，过点M作$MD\perp l$于点D，则点B在线段MD上，且$|MF|=|MD|$，$\frac{|MF|+|MB|+2}{|MA|}=\frac{2|MD|}{|MA|}=2\cos\angle MAF\left(0\leqslant\angle MAF<\frac{\pi}{2}\right)$，当$\cos\angle MAF$取最小值时，$\tan\angle MAF$取最大值，$\tan\angle MAF=\frac{x}{y+2}=\frac{x}{\frac{x^2}{8}+2}=\frac{1}{\frac{x}{8}+\frac{2}{x}}\leqslant 1$，当$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$时，等号成立，故$\cos\angle MAF\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{|MF|+|MB|+2}{|MA|}$的最小值为$\sqrt{2}$.



四、解答题

17.解：∵当$x=\frac{\pi}{2}$时，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，∴$P\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，　(1分)

又$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$，　(2分)

∴$k=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，　(3分)

∴点$P\left(\frac{\pi}{2},1\right)$处的切线方程为$y-1=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，　(5分)

即$y=\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi^2}{4}$，

当$x=0\Rightarrow y=1-\frac{\pi^2}{4}$，当$y=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$，　(7分)

∴$S=\frac{1}{2}\left|1-\frac{\pi^2}{4}\right|\cdot\left|\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\right|=\frac{(\pi^2-4)^2}{16\pi}<1$，

故命题得证.　(10分)

18.解：(1)由已知及正弦定理得$\sin B\sin A\cos C=\sin A(\sqrt{3}\cos A-\cos B\sin C)$，

又$A\in(0,\pi)$，∴$\sin A\neq 0$，

∴$\sin B\cos C=\sqrt{3}\cos A-\sin C\cos B$，

∴$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sqrt{3}\cos A$，　(3分)

∴$\sin(B+C)=\sqrt{3}\cos A$，即$\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

∴$\tan A=\sqrt{3}$，又$A\in(0,\pi)$，∴$A=\frac{\pi}{3}$.　(5分)

(2)∵△ABC的外接圆半径$R=2$，

∴$a=2R\sin A=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，　(7分)

∴$b-c=\frac{a}{2}=\sqrt{3}$，

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b-c)^2+bc$，

即$12=3+bc$，则$bc=9$，　(10分)

∴△ABC的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.　(12分)

19.解：(1)由$\frac{S_n+n}{a_n}=\frac{3}{2}$，得$S_n=\frac{3}{2}a_n-n$，

当$n\geqslant 2$时，由$S_n=\frac{3}{2}a_n-n$，可得$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-$

$(n-1)$,

上述两式作差得 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}-1$,

整理得 $a_n=3a_{n-1}+2$,即 $a_n+1=3(a_{n-1}+1)$,

所以 $b_n=3b_{n-1}(n\geqslant 2)$,　　(3 分)

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{3}{2}a_1-1$,所以 $a_1=2,b_1=a_1+1=3$,　　(4 分)

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=3$ 为首项,公比为 3 的等比数列,　　(5 分)

所以 $b_n=3\times 3^{n-1}=3^n$.　　(6 分)

(2)由(1)可得 $a_n=b_n-1=3^n-1,na_n=n\cdot 3^n-n$,　　(7 分)

所以 $T_n=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\times 3^n-(1+2+3\cdots+n)$,

令 $Q_n=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\times 3^n$,

$3Q_n=1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+(n-1)\times 3^n+n\times 3^{n+1}$,

作差得 $-2Q_n=3+3^2+\cdots+3^{n-1}+3^n-n\times 3^{n+1}$

$=\frac{3\times(1-3^n)}{1-3}-n\times 3^{n+1}$,　　(11 分)

$Q_n=\frac{1}{4}(2n-1)3^{n+1}+\frac{3}{4}$,

所以 $T_n=\frac{1}{4}(2n-1)3^{n+1}+\frac{3}{4}-\frac{n(n+1)}{2}$.　(12 分)

20. **解:**(1)平均数为 $\bar{k}=45\times 0.1+55\times 0.15+65\times 0.15+75\times 0.3+85\times 0.25+95\times 0.05=71$,

故可以估计该中药加工厂生产的袋装中药的质量指标值的平均数为 71.　　(3 分)

(2)这 3 人中恰有 2 人购买此款袋装中药的概率为

$P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.　　(7 分)

(3)设每袋袋装中药的销售利润为 z 元,则样本中每袋的平均利润为 $\bar{z}=10\times 0.25+30\times 0.45+60\times 0.25+100\times 0.05=36$(元/袋).　　(10 分)

利用样本平均数估计总体平均数可得该厂一年内生产该袋装中药的盈利约为

$36\times 100\ 000=3\ 600\ 000$(元)$=360$ 万元,　(11 分)

因为 360 万元＞200 万元,故该中药加工厂有可能在一年内通过加工该袋装中药收回投资.　(12 分)

21. **解:**(1)连接 A_1C,

因为侧面 ACC_1A_1 为矩形,所以 $A_1C^2=AC^2+AA_1^2=12$,

又 $B_1C^2+A_1B_1^2=8+4=12$,所以 $A_1C^2=B_1C^2+A_1B_1^2$,即 $A_1B_1\perp B_1C$.　①　　(2 分)

因为侧面 $ACC_1A_1\perp$ 侧面 ABB_1A_1,侧面 $ACC_1A_1\cap$ 侧面 $ABB_1A_1=AA_1$,

$AC\perp AA_1$,$AC\subset$ 面 ACC_1A_1,

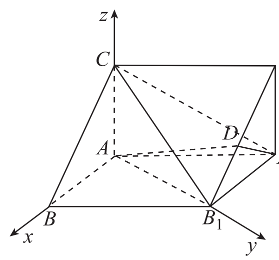
所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1,又 $A_1B_1\subset$ 平面 ABB_1A_1,

所以 $AC\perp A_1B_1$,　②　　(5 分)

由①②及 $AC\cap B_1C=C$,得 $A_1B_1\perp$ 平面 AB_1C.　　(6 分)

(2)由(1)知:$AC\perp AB_1$,$AC\perp AB$,$AB\perp AB_1$,

以 A 为原点,以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{AC}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系,



由已知,得 $A(0,0,0)$,$B_1(0,2,0)$,$A_1(-2,2,0)$,$C_1(-2,2,2)$,

由 D 为棱 B_1C_1 的中点,得 $D(-1,2,1)$,

$\therefore\overrightarrow{AD}=(-1,2,1),\overrightarrow{AA_1}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1B_1}=(2,0,0)$.

设平面 ADA_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-x+2y+z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$

取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$.　　(9 分)

由(1)知平面 AB_1C 的一个法向量为$\overrightarrow{A_1B_1}=(2,0,0)$,

设平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成的锐二面角为θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1B_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|1\times2+1\times0-1\times0|}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

即平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成的锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(12 分)

22.**解**:(1)由题意可得$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2},\\ \frac{16}{a^2}-\frac{15}{b^2}=1\end{cases}$　　(2 分)

解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=5\end{cases}$　　(4 分)

所以 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.　　(5 分)

(2)易知 $F(3,0)$,$A(-2,0)$,$B(2,0)$.

当直线 l 的斜率为 0 时,显然不适合题意;

当直线 l 的斜率不为 0 时,设直线 l 的方程为 $x=my+3$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

联立方程$\begin{cases}x=my+3\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$,消去 x 整理得:$(5m^2-4)y^2+30my+25=0$,

则$\begin{cases}5m^2-4\neq0\\ \Delta=900m^2-4\times25\times(5m^2-4)>0\end{cases}$,解得 $m\neq\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore y_1+y_2=-\frac{30m}{5m^2-4}$,$y_1y_2=\frac{25}{5m^2-4}$,　　(7 分)

分别记直线 AM,BN 的斜率为 k_1,k_2,

则 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{y_1}{my_1+5}$,$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_2}{my_2+1}$,

$\therefore\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(my_2+1)}{y_2(my_1+5)}=\frac{my_1y_2+y_1}{my_1y_2+5y_2}$,　　(9 分)

又 $my_1y_2=\frac{25m}{5m^2-4}=-\frac{5}{6}(y_1+y_2)$,

$\therefore\frac{k_1}{k_2}=\frac{-\frac{5}{6}(y_1+y_2)+y_1}{-\frac{5}{6}(y_1+y_2)+5y_2}=-\frac{1}{5}$,即$\frac{k_1}{k_2}$为定值$-\frac{1}{5}$.

即直线 AM 与直线 BN 的斜率之比为定值$-\frac{1}{5}$.

(12 分)